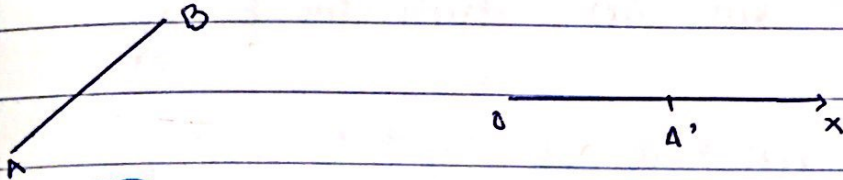


Αξιώματα ισότητας (γεωμετρική ισοτιμία)

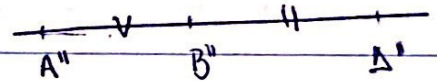
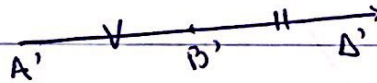
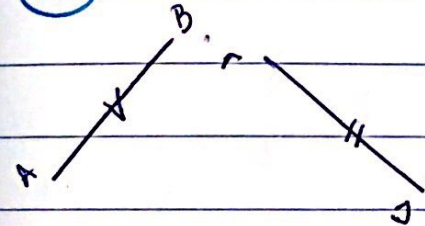
Αφορά σε ευθύγραμμα τμήματα και ~~γωνίες~~ γωνίες

(I1) Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και ημιευθεία Ox . Υπάρχει μοναδικό σημείο A' στην Ox ώστε $AB = OA'$.

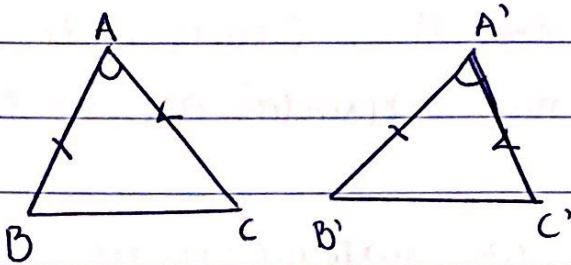


(I2) Αν $AB = CD$ και $AB = EF$ τότε $CD = EF$. Επιπλέον για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AB ισχύει $AB = AB$

(I3) Δίνονται ευθύγραμμοι τμήματα $AB, ΓΔ$

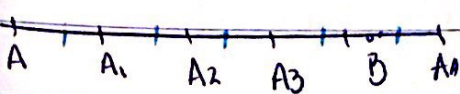


$$A'D' = A''D''$$

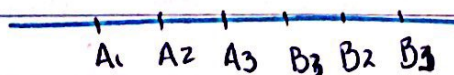


$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{array} \right\} \Rightarrow BC = B'C'$$

Αξιώματα συνέχειας



$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$$

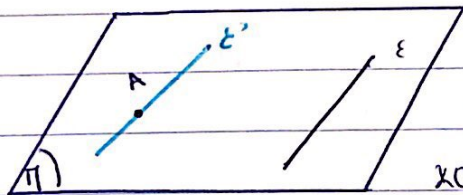


ΕΠΙΠΕΔΟ
ΜΕΤΑ
ΠΡΟΣΤΙΘΗΚΗ

Λήμμα παραλληλίας

Δίνεται επίπεδο π

ευθεία ϵ του π και σημείο A του π που δεν ανήκει στην ϵ .



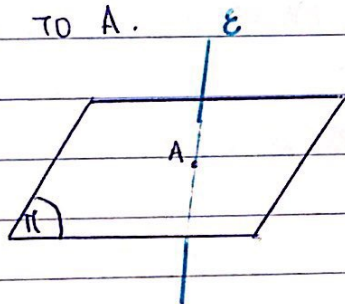
Τότε υπάρχει μοναδική ευθεία ϵ' του π η οποία διέρχεται από το A και δεν τέμνει την ϵ .

Καθτότητα ευθείας και επιπέδου

Ορισμός: Μια ευθεία ϵ καλείται κάθετη σε επίπεδο π αν-ν

(i) ϵ τέμνει το π στο σημείο A και,

(ii) ϵ είναι κάθετη σε κάθε ευθεία j του π που διέρχεται από το A .



Θεώρημα: Ευθεία ϵ τέμνει επίπεδο π στο σημείο A . Αν η ϵ είναι κάθετη σε δύο ευθείες του π που διέρχονται από το A , τότε η $\epsilon \perp \pi$.

Απόδειξη: $\epsilon \perp \delta_1$, $\epsilon \perp \delta_2$ και δ_3 τυχαία ευθεία του π που

περιέχει το A .

Θεωρώ επί της ϵ σημεία P, P' ώστε $AP = AP'$.

Τα τρίγωνα $\triangle ABP$ και $\triangle ABP'$ είναι ίσα αφού:

$AB = AB$, $AP = AP'$ και $\angle PAB = \angle P'AB$

Άρα $BP = BP'$. Ομοίως $TP = TP'$ αφού τα $\triangle AP$ και $\triangle AP'$

είναι ίσα. Τα $\triangle PBT$ και $\triangle P'BT$ είναι ίσα διότι $PB = P'B$, $BT = BT$

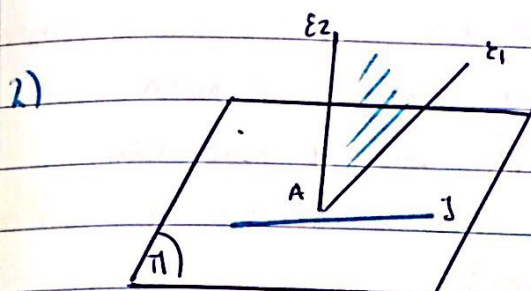
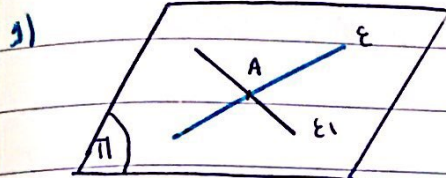
και $PT = P'T$. Άρα $\angle PBT = \angle P'BT$. Επειδή $BA = BA$ και $BP = BP'$

έχω ότι $\angle PBA = \angle P'BA \Rightarrow AP = AP' \Rightarrow \angle PAB = \angle P'AB$ διότι έχουν

τις πλευρές τους ίσες $\Rightarrow \angle PAB = \angle P'AB$

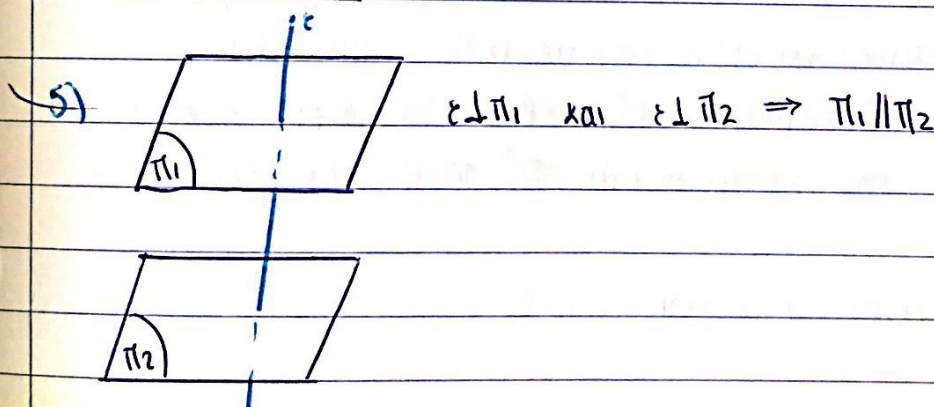
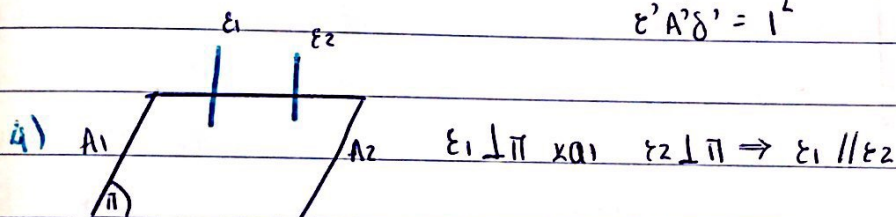
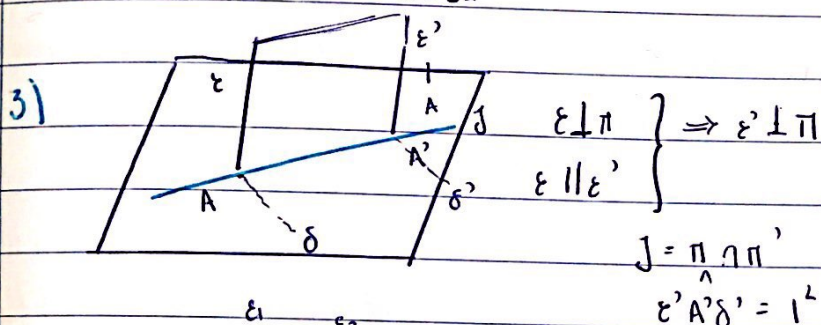
$\left. \begin{matrix} \angle PAB = \angle P'AB \\ \angle PBA = \angle P'BA \end{matrix} \right\} \Rightarrow \angle PAB = 90^\circ$

$\Rightarrow \epsilon \perp \delta_3$



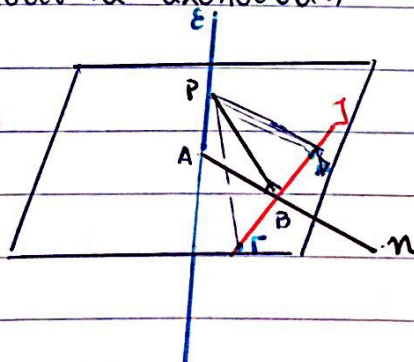
Σε ένα σημείο ενός επιπέδου έχω
το πολύ μια κάθετη.

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \perp \pi \Rightarrow \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$$



ΘΕΩΡΗΜΑ 3 ΚΑΘΕΤΟΝ (ισχύουν τα ακόλουθα:)

- (i) $\varepsilon \perp \pi$, $AN \perp J \Rightarrow PB \perp J$
- (ii) $\varepsilon \perp \pi$, $PB \perp J \Rightarrow AB \perp J$
- (iii) $PB \perp J$, $AB \perp J$, $PA \perp n \Rightarrow \varepsilon \perp \pi$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (i) θεωρώ σημεία Γ, Δ της J ώστε $ΒΓ = ΒΔ$

$$\varepsilon \perp \pi \Rightarrow \varepsilon \perp ΑΓ \Rightarrow \hat{P}\hat{A}\hat{G} = 1^\circ$$

$$\varepsilon \perp \pi \Rightarrow \varepsilon \perp ΑΔ \Rightarrow \hat{P}\hat{A}\hat{D} = 1^\circ$$

Το τρίγωνο $\triangle P\hat{A}G$ έχει την ΑΒ ως διάμετρο (εκ κατασκευής) και ύψος (από υπόθεση): Άρα είναι ισοσκελές, δηλαδή $ΑΓ = ΑΔ$. Τότε τα ορθογώνια $\triangle P\hat{A}G$ και $\triangle P\hat{A}D$ είναι ίσα $\Rightarrow PΓ = PΔ$ δηλαδή το $\triangle P\hat{A}D$ είναι ισοσκελές, συνεπώς η διάμετρος ΡΒ είναι και ύψος, δηλαδή ΡΒ ⊥ J

Αιχμές δυνάμεις:

